Modélisation du couplage endommagement non local - plasticité pour la propagation de fissures de fatigue

Augustin PERRIER-MICHON[1], Damien HALM[1], Gilbert HÉNAFF[1], Yann CHARLES[2], Mikael GUEGUEN[1] et Azdine NAIT-ALI[1]

[1]Institut Pprime – UPR CNRS 3346, ISAE-ENSMA, Chasseneuil-du-Poitou, France
[2]LSPM – UPR CNRS 3407, Université Sorbonne Paris-Nord, Villetaneuse, France

Points d'intérêt.

- Extension d'un modèle d'endommagement à gradient pour la fatigue des matériaux ductiles
- Formulation d'une loi de comportement élasto-plastique avec endommagement non-local
- Quantification énergétique des mécanismes d'endommagement monotone et cyclique

Introduction

Les modèles d'endommagement non-local font l'objet d'un vif intérêt depuis plusieurs années. Si leur cadre se concentre généralement sur les matériaux fragiles, des extensions sont faites aux matériaux ductiles [1]. Cependant, le mode de chargement considéré se limite principalement au cas monotone sans intégrer les aspects de fatigue des matériaux. D'un autre côté, Carrara et coll. [2] ont proposé un modèle à gradient d'endommagement prenant en compte une notion de cumul de dommage induit par des chargements cyclique. Toutefois, leur approche s'est limitée au cas des matériaux fragiles et sans quantification des mécanismes d'évolution de l'endommagement. Cette étude vise donc à étendre ces travaux en représentant le comportement élasto-plastique-endommageable du matériau dans un cadre permettant de traiter de problèmes de rupture par fatigue. Une attention particulière est portée au couplage entre écrouissage et endommagement en formulant la loi de comportement dans le cadre rigoureux des matériaux standards généralisés [3]. Par ailleurs, les mécanismes d'endommagement sont décrits via une nouvelle quantification énergétique, permettant d'évaluer l'apport de chaque mécanisme dans la rupture finale d'une structure. Une première étude présentée dans ce résumé vise à mieux appréhender les paramètres du modèle de cumul de dommage et valider la quantification des dommages monotones et cycliques via le bilan d'énergie. Le modèle sera par la suite étendu à un cas de propagation de fissure de fatigue sur une éprouvette *compact tension* dans le but d'établir une méthode d'identification des paramètres du modèle de fatigue.

Modélisation

Le modèle est développé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles [4]. Chaque phénomène physique est représenté par une variable interne et potentiellement son gradient. L'énergie libre d'Helmholtz est choisie comme potentiel thermodynamique pour représenter l'état du milieu matériel à un instant donné et un second potentiel (de dissipation) est défini pour régir l'évolution des variables internes considérées. Le comportement du matériau est supposé être constitué d'une phase élastique linéaire, d'un écrouissage puis d'un adoucissement menant à la rupture finale. La plasticité est donc modélisée par un modèle combinant écrouissage isotrope (dont la variable interne associée est la déformation plasticité cumulée p et la force associée est l'augmentation rayon de la surface de charge r) et cinématique linéaire (dont la variable interne est notée $\bar{\bar{\alpha}}$ et la force associée le *back stress* $\bar{\bar{X}}$ représentant le déplacement de la surface de charge) [5]. L'endommagement est représenté par une unique variable scalaire (d) et son gradient ($\overrightarrow{\nabla d}$) suivant les travaux de [6] sur les modèle d'endommagement à gradient. Une décomposition de la rigidité en une partie endommageable et non-endommageable est réalisée pour éviter l'évolution de l'endommagement dans des états de compression [7], [8]. La prise en compte de la fatigue du matériau suit les travaux de Carrara et coll. [2] : l'effet du chargement cyclique est introduit via un paramètre $\bar{\alpha}$ non compris dans l'ensemble des variables d'état mais représentant le cumul d'énergie élastique récupérable. Son rôle est de réduire le taux de restitution d'énergie critique (G_c) avec l'évolution du chargement cyclique, modélisant ainsi une notion de cumul de dommage.

En considérant un milieu matériel Ω, de bord $\partial\Omega$ de normale sortante $\vec{n}$, la construction thermodynamique du modèle couplé mène aux équations d'équilibre générales suivantes en déplacement :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{\overline{C}}}(d):(\bar{\bar{\varepsilon}}-\bar{\bar{\varepsilon}}^{p})\right)+\vec{f}=\vec{0} \text{ sur } \Omega \\ \bar{\bar{\sigma}}.\vec{n}=\vec{t} \text{ sur } \partial\Omega_N \text{ ; } \vec{u}_{|\partial\Omega_D}=\vec{U} \end{cases} \quad (1)$$

et en endommagement :

$$\begin{cases} -\vec{\nabla}.\left(f(\bar{\alpha})G_c\ell_c\overrightarrow{\nabla d}\right)+\dfrac{f(\bar{\alpha})G_c}{\ell_c}d-2(1-d)H^{+}(t)=0 \text{ sur } \Omega \\ f(\bar{\alpha})\overrightarrow{\nabla d}.\vec{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

où $\overline{\overline{\overline{C}}}(d)$ est la rigidité dégradée, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ représente les déformations totales, $\bar{\bar{\varepsilon}}^{p}$ les déformations plastiques, $\vec{f}$ est la densité volumique d'effort extérieur, $\bar{\bar{\sigma}}$ sont les contraintes de Cauchy, $\vec{t}$ est la densité surfacique d'effort imposée sur le bord $\partial\Omega_N$, $\vec{U}$ est le déplacement imposé sur le bord $\partial\Omega_D$, $f(\bar{\alpha})$ est la fonction de dégradation cyclique, ℓ_c la longueur caractéristique du modèle à gradient d'endommagement, H^{+}est la variable d'histoire du chargement. Cette dernière, composée d'une partie liée à l'élasticité et une autre liée à l'énergie bloquée par écrouissage, est supposée strictement croissante au cours du chargement ce qui permet de s'assurer de l'irréversibilité de l'endommagement [9]. Dans ces équations d'équilibre quasi-statiques, le temps t agit comme un facteur de charge contrôlant les incréments de chargement mécanique. Comme aucun phénomène n'est supposé visqueux ou dépendant du temps, la fréquence de chargement cyclique n'agit pas sur le comportement du matériau. Enfin, l'élasticité du matériau est supposée isotrope et donc représentée par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν.

Selon le système (2), l'endommagement peut évoluer selon deux mécanismes :

- endommagement « monotone » dû à l'amplitude du chargement (pilotée par H^{+}) ;
- endommagement « cyclique » : l'évolution du paramètre de cumul $\bar{\alpha}$ causé par les cycles de chargement mécanique induit une baisse de G_c.

La part de chaque mécanisme dans la rupture du matériau peut être quantifiée dans un bilan énergétique en suivant la distinction endommagement « monotone » et « cyclique ». Carrara et coll. [2] propose la fonction de dégradation cyclique du taux de restitution d'énergie critique suivante :

$$f(\bar{\alpha})=\begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\alpha}<\alpha_T \\ \left(\dfrac{2\alpha_T}{\alpha_T+\bar{\alpha}}\right)^2 & \text{si } \bar{\alpha}\geq\alpha_T \end{cases} \quad (3)$$

où α_T représente alors le seuil d'activation du cumul de dommage et par conséquent de diminution de G_c. Deux modèles d'évolution du paramètre de cumul de dommage $\bar{\alpha}$ sont étudiés : un premier qualifié de modèle sans effet de contrainte (ECM) (voir équation (4)) et un avec effet de contrainte moyenne (voir équation (5)).

$$\bar{\alpha}(t)=\int_0^t \mathcal{H}\left(\Psi^{+}\dot{\Psi}^{+}\right)\left|\dot{\Psi}\right|d\tau \quad (4)$$

$$\bar{\alpha}(t)=\frac{1}{\alpha_T}\int_0^t \mathcal{H}\left(\Psi^{+}\dot{\Psi}^{+}\right)\dot{\Psi}\Psi d\tau \quad (5)$$

où Ψ^{+} est la densité volumique de déformation élastique récupérable hors état de compression. Dans ces définitions de $\bar{\alpha}$, la fonction $\mathcal{H}\left(\Psi^{+}\dot{\Psi}^{+}\right)$ permet de s'assurer que $\bar{\alpha}$ n'évolue pas lors de la décharge et en compression. $\mathcal{H}$est la distribution de Heaviside.

L'évolution des variables d'écrouissage sont obtenues à partir de la fonction de charge suivante en appliquant le principe de normalité des matériaux standards généralisés [3]:

$$f\left(\bar{\bar{\sigma}},r,\bar{\bar{X}};d\right)=J_2\left(\bar{\bar{\sigma}}-\frac{\bar{\bar{X}}}{1-d}\right)-\left(\sigma_y+\frac{r}{1-d}\right) \quad (6)$$

où J_2 est le second invariant du déviateur de son argument et σ_y est la limité d'élasticité initiale du matériau. L'expression de r est décrite par la loi de Ludwik de paramètres b et m et $\bar{\bar{X}}$ est supposée être proportionnel à $\bar{\bar{\alpha}}$ via le coefficient de proportionnalité C_{cin}:

$$r(p)=bp^{\frac{1}{m}} \quad (7)$$

$$\bar{\bar{X}}=C_{cin}\bar{\bar{\alpha}} \quad (8)$$

Influence des paramètres de fatigue

Le modèle est étudié sur une barre bidimensionnelle en traction dont le bord inférieur est encastré et le bord supérieur est soumis à une force imposée (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**(a)). Des éléments finis Lagrangien d'ordre 1 et à intégration complète (pour éviter les problèmes de *hourglass*) sont utilisés. Deux rapports de charge représentant un chargement alterné symétrique ($R = -1$) et de traction ondulée ($R = 0{,}7$) sont considérés. L'influence du paramètre α_T est étudié sur les modèles sans effet de contrainte moyenne (ECM) (voir équation 4) et avec ECM (voir équation 5). Les paramètres du modèle sont donnés dans le **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**.

Paramètre	Valeur	Unité
E	210000	MPa
ν	0,33	-
σ_y	233	MPa
b	1523,2	MPa
m	4,0608	-
C_{cin}	110000	MPa
G_c	30,0	N/mm
ℓ_c	0,5	mm

Tableau 1 : Propriétés du matériau utilisés dans les simulations de la barre 2D

On définit N_r le nombre de cycle à rupture, c'est-à-dire le nombre de cycle de chargement mécanique à appliquer pour atteindre $d = 1$. Comme observé sur les courbes forces-déplacement de la Figure 1(b), plus la valeur de α_T est importante et plus le nombre de cycle à rupture N_r augmente. Cette observation suggère que α_T est le paramètre clé pilotant la résistance en fatigue du matériau. Le modèle avec ECM prédit une rupture pour un nombre de cycle moins important que pour le modèle sans ECM et ce qu'elle que soit la configuration $(\alpha_T; R)$. Cependant, on remarque que l'écart $\Delta N^{ECM} = N_r^{ECM} - N_r^{pas\ ECM}$ des cycles à rupture pour le modèle avec ECM et sans ECM est plus important à rapport de charge non-symétrique pour un même α_T, voir Tableau 2. Cette observation suggère que le modèle sans ECM ne serait uniquement sensible à l'amplitude de chargement alors que le modèle avec ECM serait influencé par l'amplitude de chargement et la charge moyenne.

En se reportant aux définitions (4) et (5), le modèle sans effet de contrainte moyenne dépend uniquement de l'amplitude des variations de l'énergie de déformation, car il est fonction de $|\dot{\Psi}^+|$, alors que le modèle avec effet de contrainte moyenne introduit une dépendance au niveau de chargement via le terme $\Psi^+\dot{\Psi}^+$, ce qui le rend sensible à la fois à l'amplitude et à la valeur moyenne du chargement.
Par ailleurs, si Ψ^+ varie entre 0 et Ψ^+_{max} pour t allant de $t = 0$ et t, alors l'incrément de $\bar{\alpha}$ induit par le modèle sans ECM est :

$$\Delta\bar{\alpha}^{sans\ ECM} = \Psi^+_{max} \tag{9}$$

Alors que celui avec ECM est :

$$\Delta\bar{\alpha}^{avec\ ECM} = \frac{(\Psi^+_{max})^2}{2\alpha_T} \tag{10}$$

Ces expressions mettent en évidence une différence de nature des deux modèles :

- le modèle sans ECM est proportionnel à Ψ^+_{max}, ce qui induit un cumul monotone tout au long du cycle ;
- le modèle avec ECM est quadratique en Ψ^+_{max} pondéré par α_T, ce qui provoque un cumul plus important au voisinage du chargement maximal que proche de $\Psi^+ = 0$.

Pour le modèle avec ECM, la dépendance à α_T permet d'expliquer l'augmentation de ΔN^{ECM} avec α_T. L'incrément de cumul $\Delta\bar{\alpha}^{avec\ ECM}$ déminue avec l'augmentation de α_T, ce qui induit une dégradation de G_c plus progressive au cours des cycles et donc une résistance à la fatigue accrue.

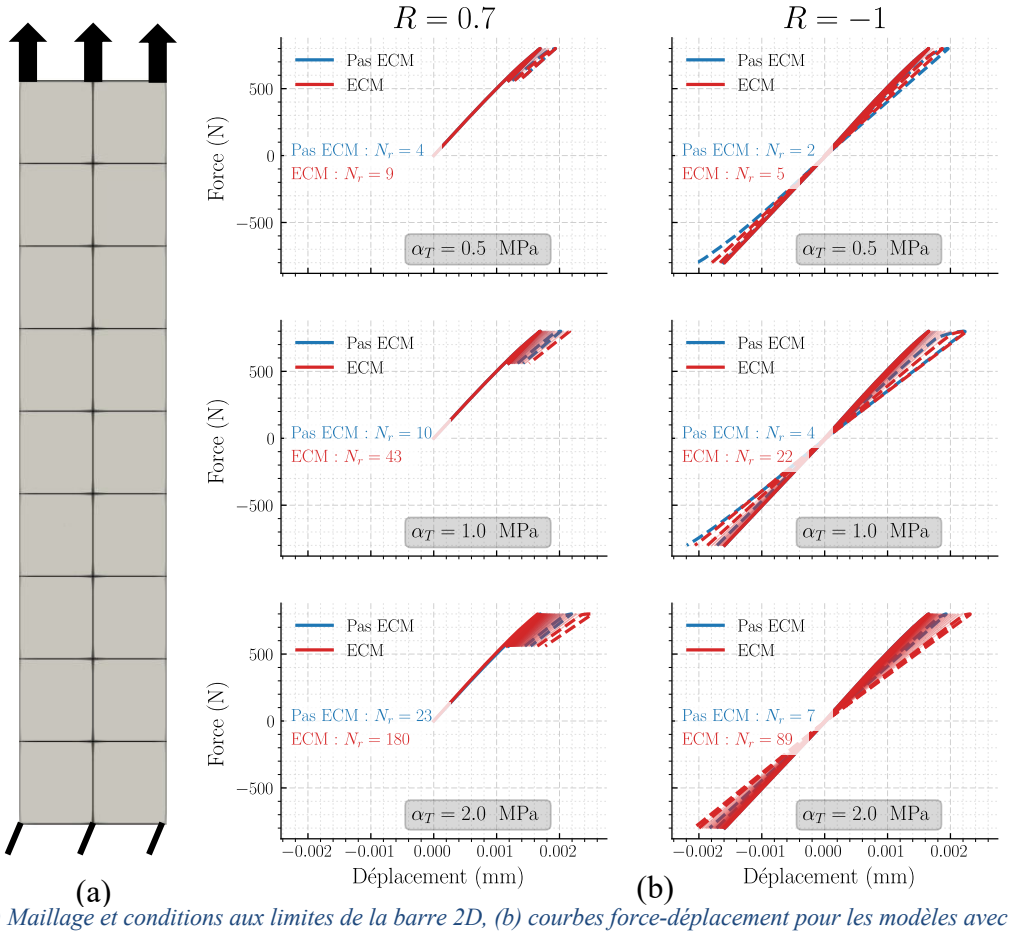


Figure 1: (a) Maillage et conditions aux limites de la barre 2D, (b) courbes force-déplacement pour les modèles avec et sans effet de contrainte moyenne pour deux rapports de charge R et différentes valeurs de α_T. N_r est le nombre de cycle à rupture. Les lignes pleines, transparentes et pointillées indiquent respectivement le premier cycle, les cycles intermédiaires et le dernier cycle

$\boldsymbol{\alpha_T}$ **(MPa)**	$\boldsymbol{\Delta N^{ECM}}$ **; R = 0,7**	$\boldsymbol{\Delta N^{ECM}}$ **; R = −1**
0,5	5	3
1,0	33	18
2,0	279	82

Tableau 2 : Différences de nombre de cycle à rupture entre le modèle avec ECM et sans ECM, $\Delta N^{ECM} = N_r^{ECM} - N_r^{pas\ ECM}$ pour deux rapports de charge et trois paramètres α_T différents

Comme énoncé précédemment, les mécanismes d'endommagement monotone et cyclique sont discriminés dans le bilan énergétique. On remarque sur la Figure 2 que l'endommagement monotone évolue dès le premier cycle de chargement puis stagne à une valeur pour les cycles suivants alors que l'endommagement cyclique augmente au cours des cycles. A l'approche de N_r, une augmentation brusque de ces deux énergies liées à l'endommagement est observée. L'augmentation de l'énergie d'endommagement monotone est induite par écrouissage provoqué par un calcul en force imposée et confirmé par une augmentation du travail plastique lors de ces cycles. D'un autre côté, l'accumulation d'énergie de déformation entraine une réduction du taux de restitution d'énergie critique se traduisant par une augmentation de l'énergie d'endommagement cyclique. Ces observations permettent de valider notre approche de quantification des dommages cyclique et monotone. On peut noter le fait que cette approche est indépendante des modèles avec ECM et sans ECM, du rapport de charge et du paramètre α_T, ce qui procure un cadre général à cette quantification.

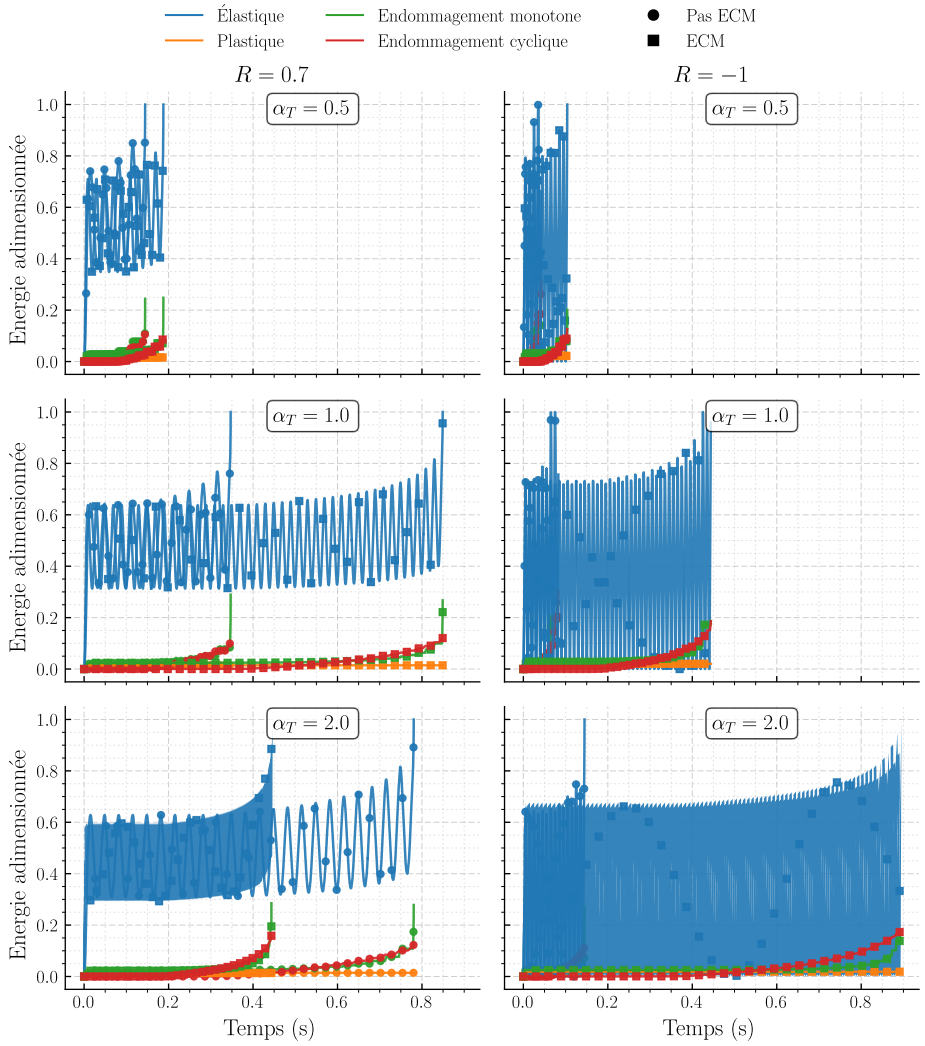


Figure 2: Bilans énergétiques pour les modèles avec et sans effet de contrainte moyenne pour deux rapports de charge R et différentes valeurs de α_T

Conclusions et perspectives

Cette première étude a permis établir l'influence respective des différents paramètres du modèle de cumul de dommage dans le cas d'une barre en traction soumis à un chargement cyclique de traction ondulé ($R = 0{,}7$) et alterné symétrique ($R = -1$). Ces simulations confirment le rôle de α_T comme seuil d'activation du cumul des dommages et comme paramètre clé pilotant la résistance en fatigue du matériau. Par ailleurs, une différence de comportement à rupture entre le modèle avec ECM et sans ECM est notée. Pour le modèle sans ECM, la rupture survient à plus faible nombre de cycles de chargement que pour celui avec ECM. Enfin, l'approche de quantification des mécanismes d'endommagement monotone et cyclique a été validée sur ces cas de chargement. Cette étude met en lumière une transition progressive d'un endommagement induit par l'amplitude de chargement vers un endommagement par fatigue causé par les chargements cycliques.

Le modèle sera testé par la suite sur un cas de propagation de fissure dans une éprouvette *compact tension*, ce qui pourrait permettre d'identifier le paramètre α_T à partir de données expérimentales pour les modèles avec et sans ECM. Cependant, la propagation de fissure par cette approche ne peut être simulée par contrôle en force imposée avec les outils dont on dispose actuellement. Numériquement, la propagation de la fissure induit une chute des forces internes qui ne peuvent pas équilibrer les forces externes appliquées. Le développement d'un solver en longueur d'arc [10] à amplitude variable est envisagé pour pallier cette difficulté.

Références

[1] B. Nedjar, 'Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects', *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 30, pp. 5421–5451, 2001, doi: 10.1016/S0020-7683(00)00358-9.

[2] P. Carrara, M. Ambati, R. Alessi, and L. De Lorenzis, 'A framework to model the fatigue behavior of brittle materials based on a variational phase-field approach', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 361, p. 112731, Apr. 2020, doi: 10.1016/j.cma.2019.112731.

[3] B. Halphen and Q. S. Nguyen, 'On Generalized Standard Materials', *Journal de Mécanique*, vol. 14, no. 1, pp. 39–63, 1975, doi: 10.1016/S0022-5096(96)00110-X.

[4] P. Germain, Q. Son Nguyen, and P. Suquet, 'Continuum Thermodynamics', *J. Appl. Mech*, vol. 50, no. 4b, pp. 1010–1020, 1983, doi: 10.1115/1.3167184.

[5] J. Lemaitre, 'Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, no. 1, pp. 31–49, Sep. 1985, doi: 10.1016/0045-7825(85)90026-X.

[6] M. Frémond and B. Nedjar, 'Damage, gradient of damage and principle of virtual power', *Int. J. Solids. Struct.*, vol. 33, no. 8, pp. 1083–1103, 1996, doi: https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00074-7.

[7] V. Ziaei-Rad, M. Mollaali, T. Nagel, O. Kolditz, and K. Yoshioka, 'Orthogonal decomposition of anisotropic constitutive models for the phase field approach to fracture', *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 171, p. 105143, 2023, doi: 10.1016/j.jmps.2022.105143.

[8] Q.-C. He, 'Three-dimensional strain and stress orthogonal decompositions via an elastic energy preserving transformation', *International Journal of Solids and Structures*, vol. 295, p. 112818, Jun. 2024, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2024.112818.

[9] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker, 'Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 83, pp. 1273–1311, 2010, doi: 10.1002/nme.2861.

[10] E. Riks, 'An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems', *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, no. 7, pp. 529–551, 1979, doi: 10.1016/0020-7683(79)90081-7.